107 - Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples.

Cadre : G est un groupe fini de cardinal n, V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie d.

I Représentation d'un groupe fini

1) Définitions et premiers exemples

Définition 1. Une représentation linéaire de G dans V est un morphisme $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$. On notera souvent ρ_s au lieu de $\rho(s)$. On dit que V est un espace de représentation de G. Le degré de ρ est $d = \dim V$.

Exemple 2. *La représentation triviale la représentation de degré 1 :*

$$\rho : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

Exemple 3. *On suppose que G agit sur un ensemble X de cardinal d. Soit $(e_x)_{x\in X}$ une base de V. La représentation suivante est appelée représentation de permutation associée à X :*

$$\rho : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathcal{GL}(V) \\ s & \longmapsto & (e_x \mapsto e_{s\cdot x}) \end{array} \right.$$

Exemple 4. *On suppose que $d = n$. Soit $(e_t)_{t\in G}$ une base de V. La représentation suivante est appelée représentation régulière :*

$$R : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathcal{GL}(V) \\ s & \longmapsto & (e_t \mapsto e_{st}) \end{array} \right.$$

Définition 5. Soient $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ et $\rho' : G \to \mathcal{GL}(V')$ deux représentations linéaires de G. On dit que ces représentations sont isomorphes (ou semblables) s'il existe un isomorphisme $\tau : V \to V'$ qui vérifie $\tau\circ\rho_s = \rho'_s\circ\tau$ pour tout $s \in G$.

Remarque 6. *Deux représentations isomorphes ont même degré.*

Exemple 7. *Soit ρ une représentation de G. On suppose qu'il existe $w \in W$ tel que $(\rho_s(w))_{s\in G}$ soit une base de V. Alors ρ est isomorphe à la représentation régulière par $e_s \mapsto \rho_s(w)$.*

2) Sous-représentations

Définition 8. Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire, et soit W un sous-espace vectoriel de V stable par G (donc stable par ρ_s pour tout $s \in G$). On définit alors une sous-représentation de ρ par :

$$\rho|_W : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathcal{GL}(W) \\ s & \longmapsto & p_s|_W \end{array} \right.$$

Exemple 9. *Soit $R : G \to \mathcal{GL}(V)$ la représentation régulière de G. Soient $x = \sum_{s\in G} e_s$ et $W = \mathrm{Vect}(x)$. Alors, pour tout $s \in G$, on a $R_s(x) = x$. Ainsi, $\tau|_W$ est une sous-représentation de τ, qui est isomorphe à la représentation unité par $\lambda \mapsto \lambda x$.*

Théorème 10 (Théorème de Maschke)**.** *Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire, et soit W un sous-espace vectoriel de V stable par G. Il existe alors un supplémentaire W_0 de W dans V qui est stable par G.*

3) Représentations irréductibles

Définition 11. Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire de G. Si $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$, on dit alors que ρ est la somme directe des $\rho_i = \rho|_{V_i}$, que l'on note $\rho = \bigoplus_{i=1}^r \rho_i$.

Définition 12. Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire de G. On dit qu'elle est irréductible si V n'est pas réduit à $\{0\}$ et si aucun sous-espace vectoriel non trivial de V n'est stable par G.

Remarque 13. *Toute représentation de degré 1 est irréductible.*

Théorème 14. *Toute représentation linéaire est somme directe de représentations irréductibles.*

Remarque 15. *Cette décomposition n'est pas unique en général. En effet, si, pour tout $s \in G$, $\rho_s = Id_V$, ρ peut se décomposer de bien des façons en écrivant V comme somme directe de droites vectorielles.*

II Caractère d'un groupe fini

1) Définitions et premières propriétés

Définition 16. Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire de G. On appelle caractère de ρ la fonction :

$$\chi : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & \mathrm{tr}(\rho_s) \end{array} \right.$$

Proposition 17. *Soit χ le caractère d'un représentation de degré n.*

(i) $\chi(e) = n$

(ii) $\forall s \in G,\ \chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$

(iii) *χ est central :* $\forall s, t \in G,\ \chi(tst^{-1}) = \chi(s)$

Proposition 18. *Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire de G de caractère χ. On suppose que ρ est somme directe de représentations $\rho_i : G \to \mathcal{GL}(V_i)$ de caractères χ_i pour $i \in [\![1, r]\!]$. Alors $\chi = \sum_{i=1}^r \chi_r$.*

Exemple 19. *On suppose que G agit sur un ensemble X. Soit ρ la représentation de permutation correspondante. Alors :*

$$\forall s \in G,\ \chi(s) = \mathrm{Card}\left(\{x \in X \mid s \cdot x = x\}\right)$$

2) Lemme de Schur, premières applications

Proposition 20 (Lemme de Schur)**.** *Soient $\rho^1 : G \to \mathcal{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G \to \mathcal{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G. Soit $f : V_1 \to V_2$ une application linéaire telle que, pour tout $s \in G$, $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$. Alors :*

(i) Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, alors $f = 0$.

(ii) Si $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$, alors f est une homothétie.

Corollaire 21. *Soient $\rho^1 : G \to \mathcal{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G \to \mathcal{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G. Soit h une application linéaire de V_1 dans V_2, et posons pour tout $t \in G$:*

$$h^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} (\rho_t^2)^{-1} h \rho_t^1$$

(i) Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, alors $h^0 = 0$.

(ii) Si $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$, alors h^0 est une homothétie de rapport $\frac{\mathrm{tr}(h)}{\dim V_1}$.

Définition 22. Soient $\varphi, \psi : G \to \mathbb{C}$ deux fonctions. On pose :

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \varphi(t) \psi(t^{-1})$$

Théorème 23. *Soient $\rho^1 : G \to \mathcal{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G \to \mathcal{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G. Pour $t \in G$, on écrit $(r_{i,j}(t))_{1 \leqslant i,j \leqslant n_1}$ la matrice de ρ_t^1 dans une base de V_1 et $(u_{i,j}(t))_{1 \leqslant i,j \leqslant n_2}$ la matrice de ρ_t^2 dans une base de V_2. Soient $i_1, j_1 \in [\![1, n_1]\!]$ et $i_2, j_2 \in [\![1, n_2]\!]$, alors :*

(i) Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, alors on a $\langle u_{i_2,j_2}, r_{i_1,j_1} \rangle = 0$.

(ii) Si $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$, alors on a $\langle u_{i_2,j_2}, r_{i_1,j_1} \rangle = \frac{1}{n} \delta_{i_2,i_1} \delta_{j_2,j_1}$.

3) Orthogonalité des caractères

Définition 24. Soient $\varphi, \psi : G \to \mathbb{C}$ deux fonctions. On pose :

$$(\varphi | \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \varphi(t) \overline{\psi(t)}$$

$(.|.)$ est un produit scalaire.

Remarque 25. *Si χ est un caractère, alors $\langle \varphi, \chi \rangle = (\varphi | \chi)$.*

Théorème 26. *(i) Si χ est le caractère d'une représentation irréductible, on a $(\chi|\chi) = 1$.*

(ii) Si χ et χ' sont les caractères de deux représentations irréductibles non isomorphes, on a $(\chi|\chi') = 0$.

Remarque 27. *Les caractères irréductibles sont un système orthogonal.*

Théorème 28. *Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire de G, de caractère χ, et supposons ρ décomposée en somme directe de représentations irréductibles : $\rho = \bigoplus_{i=1}^r \rho_i$. Alors, si ρ_0 est une représentation irréductible de caractère χ_0, le nombre de ρ_i isomorphes à ρ_0 est égal au produit scalaire $(\chi|\chi_0) = \langle \chi, \chi_0 \rangle$.*

Remarque 29. *Le nombre des ρ_i isomorphes à représentation irréductible donnée ne dépend pas de la décomposition.*

Corollaire 30. *Deux représentations de même caractère sont isomorphes.*

Théorème 31. *Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire de G, de caractère χ. Alors $(\chi|\chi) = \sum_{i=1}^r m_i^2$, où l'on a écrit $\rho = \bigoplus_{i=1}^r m_i \rho_i$.*

Corollaire 32. *Si χ est un caractère, alors $(\chi|\chi)$ est un entier positif, et vaut 1 si, et seulement si, il est irréductible.*

4) Nombre de représentations irréductibles

Proposition 33. *Soit f une fonction centrale sur G, et soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire de G. Soit ρ l'application linéaire de V dans lui-même définie par $\rho_f = \sum_{t\in G} f(t)\rho_t$. Si ρ est irréductible de degré n et de caractère χ, alors ρ_f est une homothétie de rapport $\lambda = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi})$.*

Théorème 34. *Les caractères irréductibles forment une base orthonormale de l'espace vectoriel des fonctions centrales sur G.*

Théorème 35. *Le nombre des représentations irréductibles de G (à isomorphisme près) est égal au nombre classes de conjugaison de G.*

Proposition 36. *Soit $s \in G$ et soit $c(s)$ le nombre d'éléments de la classe de conjugaison de s. Soient $\chi_1, \dots, \chi_k$ les caractères irréductibles de G.*

(i) $\sum_{i=1}^k \overline{\chi_i(s)}\chi_i(s) = \frac{|G|}{c(s)}$

(ii) Si $t \in G$ n'est pas conjugué à s, on a $\sum_{i=1}^k \overline{\chi_i(s)}\chi_i(t) = 0$.

III Tables de caractères

1) Généralités

Définition 37. On note $C_1, \dots, C_r$ les classes de conjugaison de G et $\chi_1, \dots, \chi_r$ les caractères irréductibles de G. On appelle table de caractères de G le tableau de taille $r \times r$ dont la valeur à la ligne i et à la colonne j vaut $\chi_i(C_j)$.

Exemple 38. *Table de D_8 et de $\mathbb{H}_8$ (voir Annexe). Ces groupes ont même table de caractères mais ne sont pas isomorphes.*

2) Groupes cycliques et abéliens

Supposons que G est abélien.

Théorème 39. *G est abélien si et seulement si toute représentation irréductible est de degré* 1.

Exemple 40. *Table de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (voir Annexe).*

Définition 41. L'exposant de G est le ppcm des ordres de ses éléments.

Définition 42. On pose $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G. C'est un groupe, appelé groupe dual de G.

Proposition 43. *L'application $\iota : G \to \widehat{\widehat{G}}$ définie pour $g \in G$ par $\iota(g) : \chi \mapsto \chi(g)$ est un isomorphisme.*

Lemme 44. *Il existe un élément de G d'ordre l'exposant de G.*

Proposition 45. *G et $\widehat{G}$ ont même exposant.*

Théorème 46. *Il existe un unique entier ℓ et une unique suite $d_\ell | \cdots | d_2 | d_1$ d'entiers supérieurs à 2 tels que d_1 est l'exposant de G et :*

$$G \cong \prod_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$$

Corollaire 47. *G et $\widehat{G}$ sont isomorphes.*

3) Tables et simplicités

Lemme 48. *Soit $\rho : G \to \mathcal{GL}(V)$ une représentation linéaire de G de caractère χ. Alors* $\mathrm{Ker}(\rho) = \mathrm{Ker}(\chi) = \{g \in G \,|\, \chi(g) = \chi(e)\}$.

Proposition 49. *Soient $\chi_1, \dots, \chi_k$ les caractères irréductibles de G. Les sous-groupes distingués de G sont les $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(\chi_i)$ où $I \subset [\![1, k]\!]$.*

Corollaire 50. *G est simple si, et seulement si, pour tout caractère irréductible non trivial de G et tout $g \in G \setminus \{e\}$ on a $\chi(g) \neq \chi(e)$.*

Exemple 51. *Tables de $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$ (voir Annexe).*

Remarque 52. *Grâce à leurs tables de caractères, on voit que $\mathfrak{S}_3$ est simple, mais $\mathfrak{S}_4$ ne l'est pas car le sous-groupe $\mathrm{Ker}(\theta)$ des doubles transpositions et $\mathfrak{A}_4 = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ sont distingués et non triviaux.*

Développements

— Structure des groupes abéliens finis (43,44,45,46) [Col09]

— Sous-groupes distingués et caractères (48,49,50) [Pey08]

Références

[Ser70] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann

[Col09] P. Colmez. *Éléments d'analyse et d'algèbre.* Les éditions de l'École Polytechnique

[Pey08] G. Peyré. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier.* Ellipses

Annexes

D_8	$\{id\}$	$\{r^2\}$	$\{r, r^3\}$	$\{s, r^2 s\}$	$\{rs, r^3 s\}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

Figure 1 – Table de caractères de D_8

$\mathbb{H}_8$	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{\pm i\}$	$\{\pm j\}$	$\{\pm k\}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

Figure 2 – Table de caractères de $\mathbb{H}_8$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	0	1	2	$\cdots$	$n-1$
χ_1	1	1	1	$\cdots$	1
χ_2	1	ω	ω^2	$\cdots$	ω^{n-1}
χ_3	1	ω^2	ω^4	$\cdots$	ω^{n-2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_n	1	ω^{n-1}	ω^{n-2}	$\cdots$	ω

où $\quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Figure 3 – Table de caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\mathfrak{S}_3$	Id	(ab)	(abc)
1	1	1	1
ε	1	-1	1
θ	2	0	-1

Figure 4 – Table de caractères de $\mathfrak{S}_3$

$\mathfrak{S}_4$	Id	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\chi$	3	-1	-1	0	1
θ	2	0	2	-1	0

Figure 5 – Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

$\mathfrak{A}_4$	Id	$C \setminus \{Id\}$	tC	t^2C
1	1	1	1	1
χ_1	1	1	j	j^2
χ_2	1	1	j^2	j
χ_3	3	-1	0	0

Figure 6 – Table de caractères de $\mathfrak{A}_4$